Fraktale Dimension

Messen von Komplexität

Sebastian Holtermann

Dimension

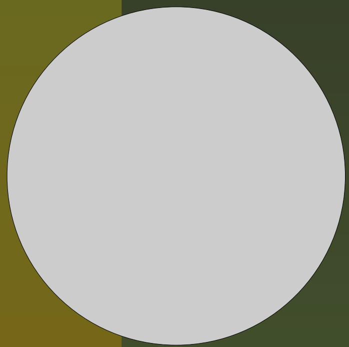
Der Begriff Dimension geht zurück auf die Euklidische Geometrie und soll soviel wie „Anzahl der Ausdehnungen“ bedeuten.

Euklidische Geometrien

Beschäftigt sich mit regelmäßigen Gebilden, wie z. B.

Euklidische Geometrien

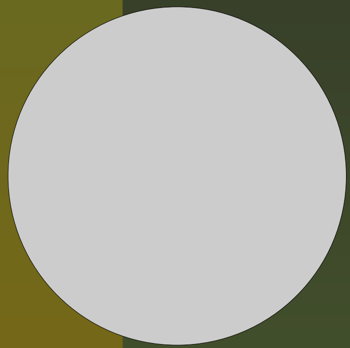
Beschäftigt sich mit regelmäßigen Gebilden, wie z. B.



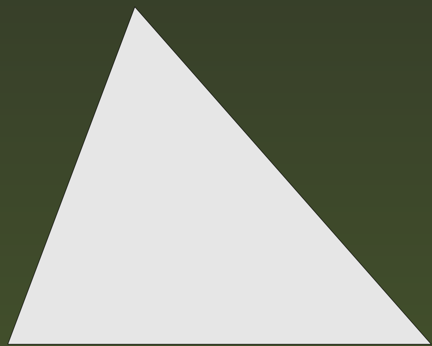
Kreisen

Euklidische Geometrien

Beschäftigt sich mit regelmäßigen Gebilden, wie z. B.



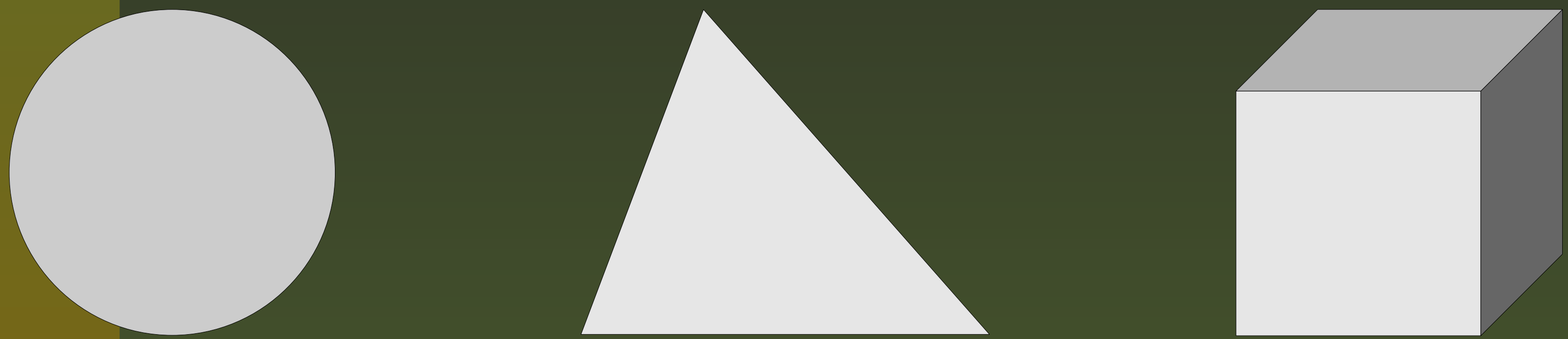
Kreisen



Dreiecken

Euklidische Geometrien

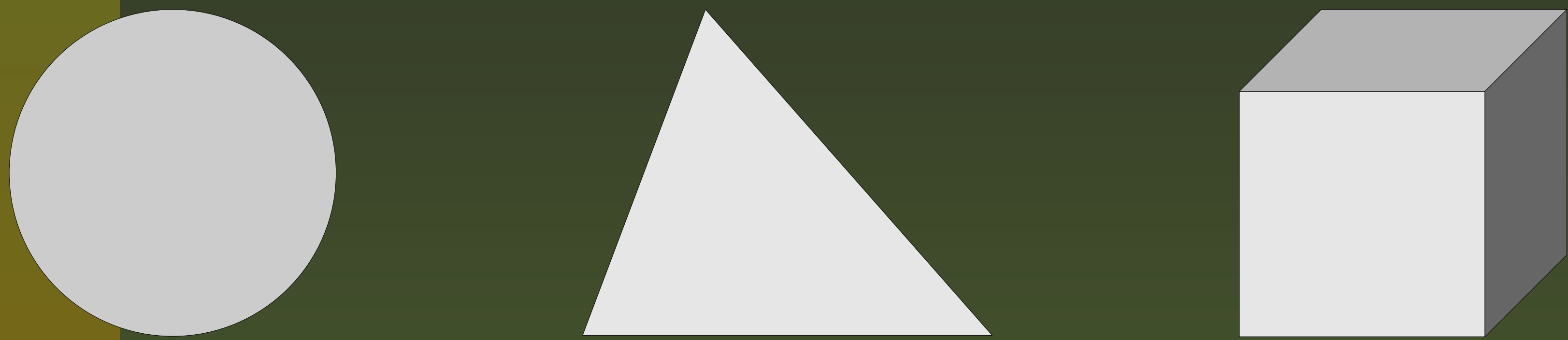
Beschäftigt sich mit regelmäßigen Gebilden, wie z. B.



Kreisen Dreiecken Wuerfeln

Euklidische Geometrien

Beschäftigt sich mit regelmäßigen Gebilden, wie z. B.

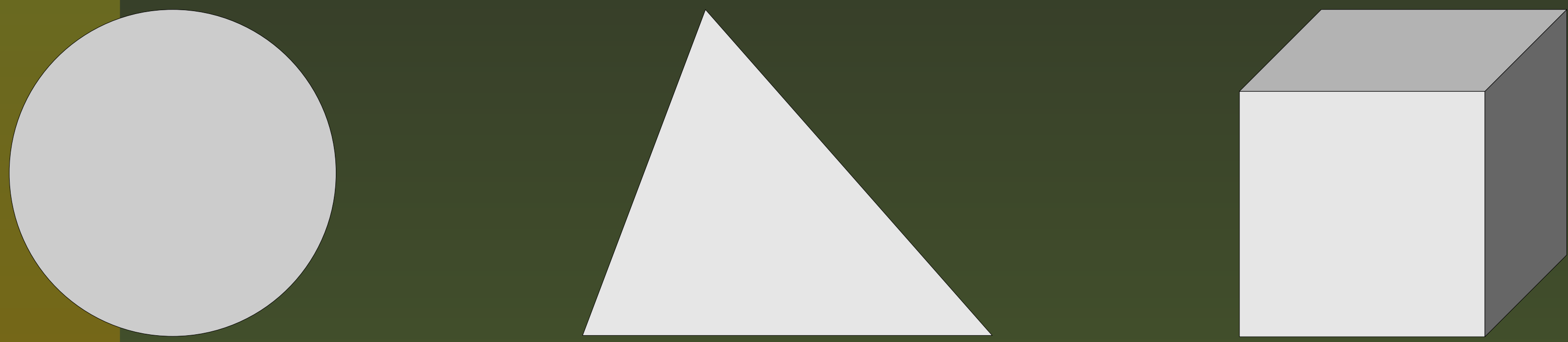


Kreisen Dreiecken Wuerfeln

$\longrightarrow$ Drastische Abstraktionen

Euklidische Geometrien

Beschäftigt sich mit regelmäßigen Gebilden, wie z. B.

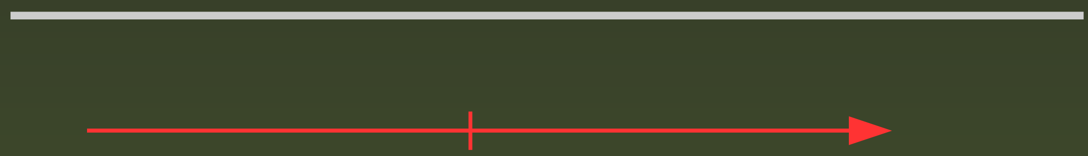


Kreisen Dreiecken Wuerfeln

$\longrightarrow$ Drastische Abstraktionen
$\longrightarrow$ Ganzzahlige Dimension

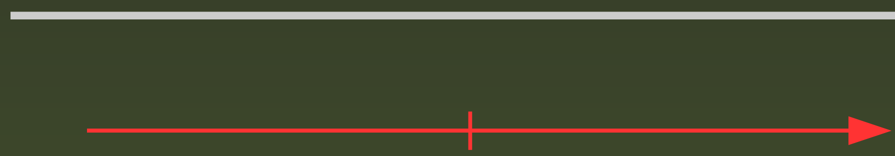
Euklidische Geometrien

Geraden und Geradenabschnitte (Strecken)



Euklidische Geometrien

Geraden und Geradenabschnitte (Strecken)

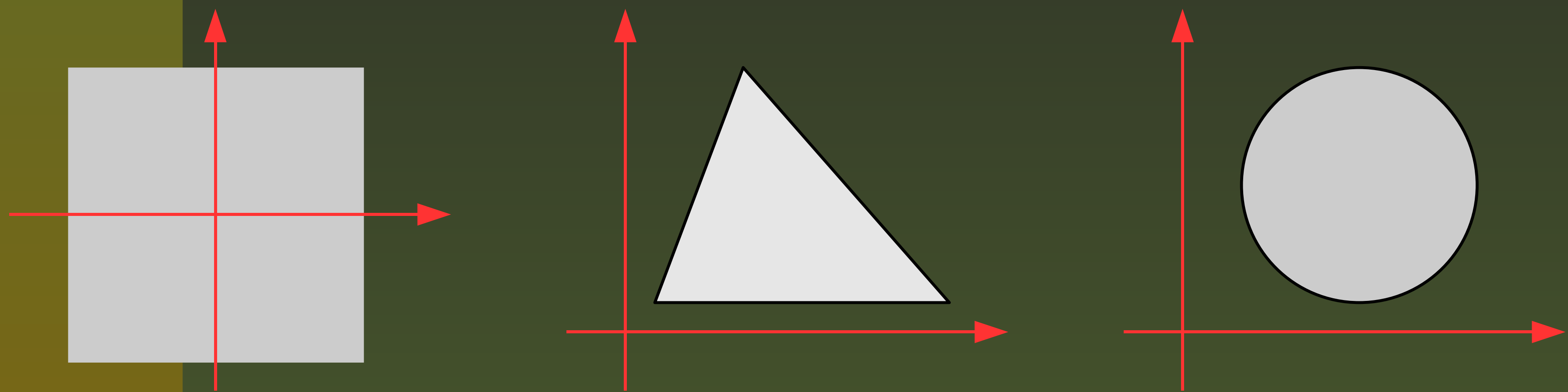


Erstrecken sich in nur einer Richtung (Dimension).

$$D = 1$$

Euklidische Geometrien

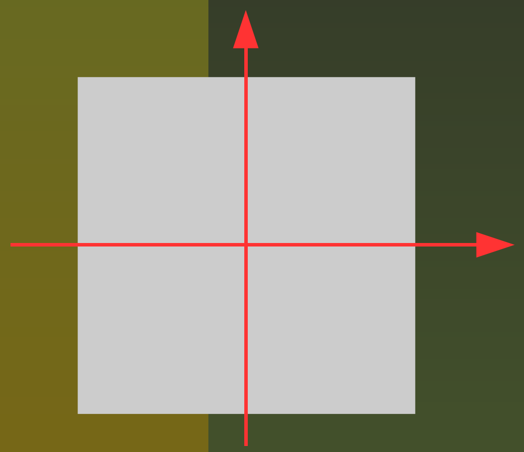
Ebenen und Ebenenstücke (Flächen)



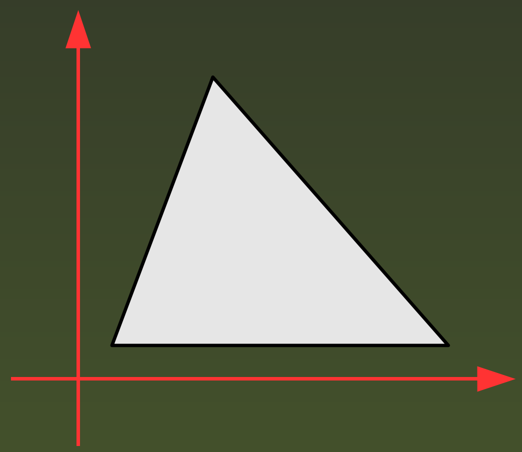
Ebene Dreieck Kreis

Euklidische Geometrien

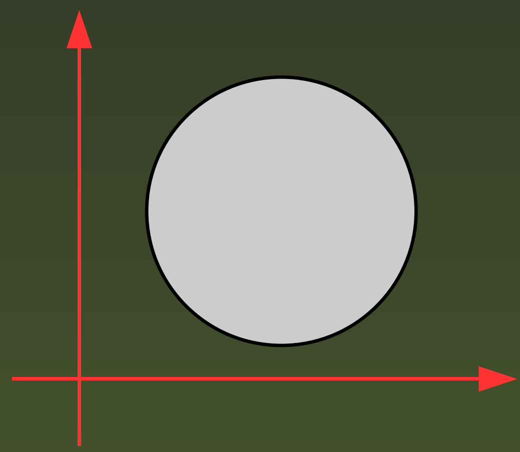
Ebenen und Ebenenstücke (Flächen)



Ebene



Dreieck



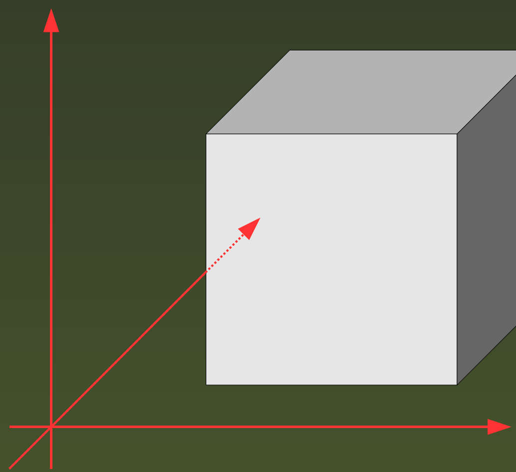
Kreis

Erstrecken sich in zwei Dimensionen.

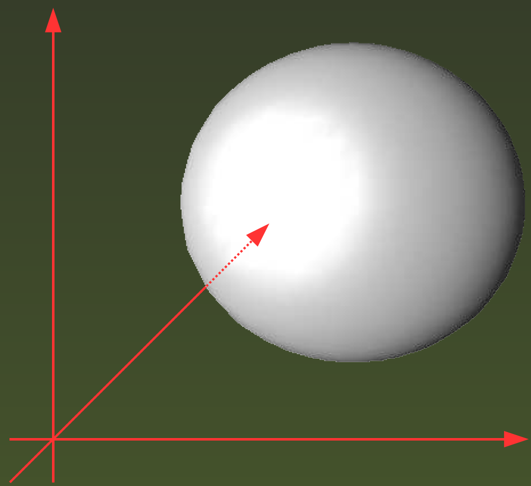
$$D = 2$$

Euklidische Geometrien

Raum und Raumteile (Volumen)



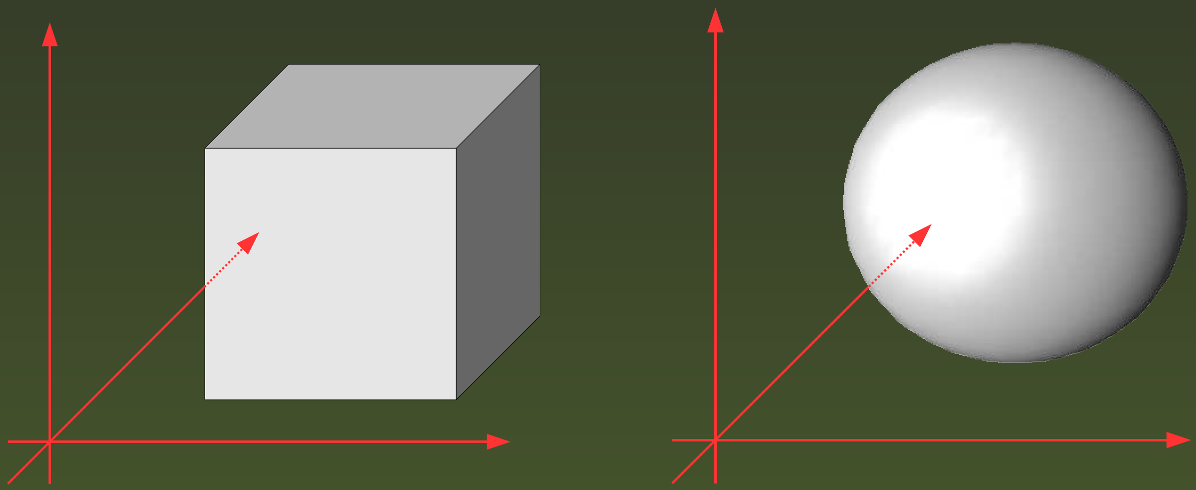
Würfel



Kugel

Euklidische Geometrien

Raum und Raumteile (Volumen)



Würfel Kugel

Erstrecken sich in drei Dimensionen.

$$D = 3$$

Dimension eines Vektorraumes

Sind

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \tag{1}$$

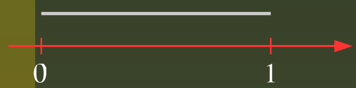
linear unabhängige Elemente eines Vektorraumes V und für jedes weitere Element $\vec{a} \in V$ existieren nicht verschwindende Koeffizienten λ_i, so dass

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \vec{a}_i + \underbrace{\lambda \vec{a}}_{\neq \vec{0}} = 0 \tag{2}$$

Dann bilden die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ eine Basis von V und die *Dimension* D von V ist $\underline{D = n}$.

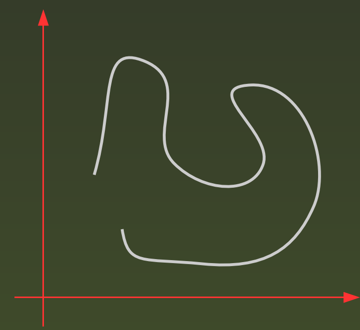
Faltung in höherer Dimensionen

1-D in 2-D: $\{x|x \in [0,1]\} \;\longrightarrow\; R^2$



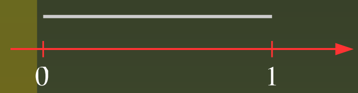
$$\longrightarrow$$

$$f_1 : G \to R^2$$



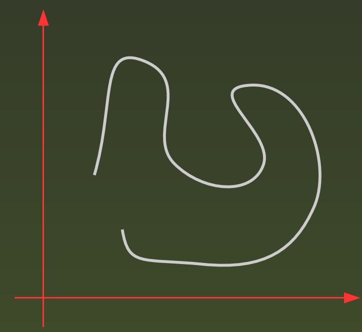
Faltung in höherer Dimensionen

1-D in 2-D: $\{x|x \in [0,1]\} \;\rightarrow\; R^2$

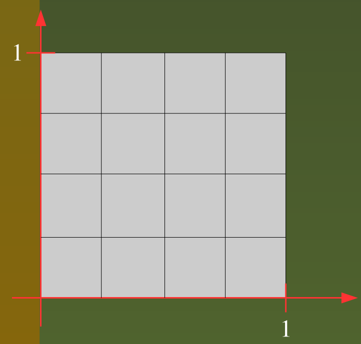


$$\longrightarrow$$

$$f_1 : G \rightarrow R^2$$

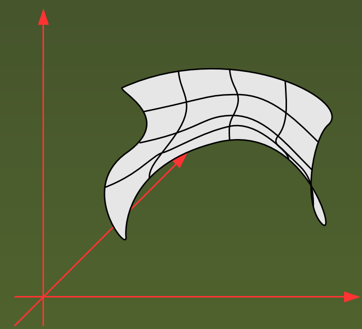


2-D in 3-D: $\{(x,y)|x,y \in [0,1]\} \;\rightarrow\; R^3$



$$\longrightarrow$$

$$f_2 : E \rightarrow R^3$$



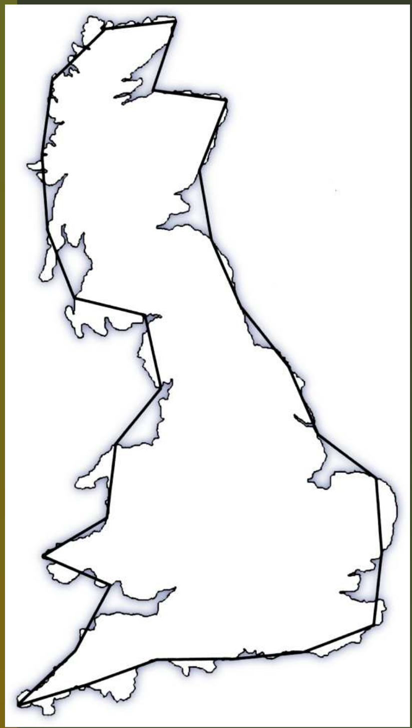
Wie lang ist die Küste von England?

Wie lang ist die Küste von England?

Zirkelmethode

Wie lang ist die Küste von England?

Zirkelmethode

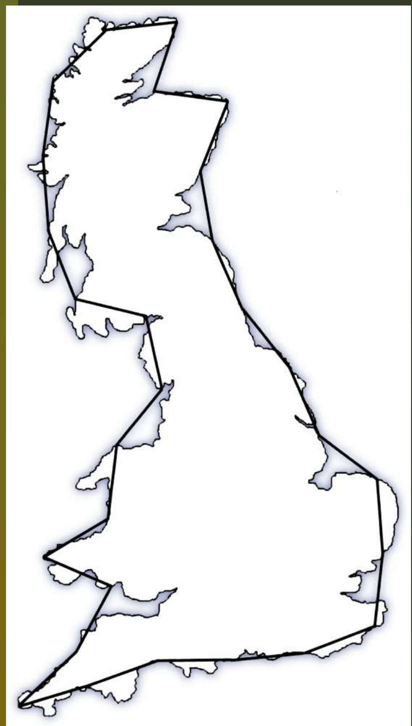


Zirkelweite: $\varepsilon = 100$ km

Länge: 3800 km

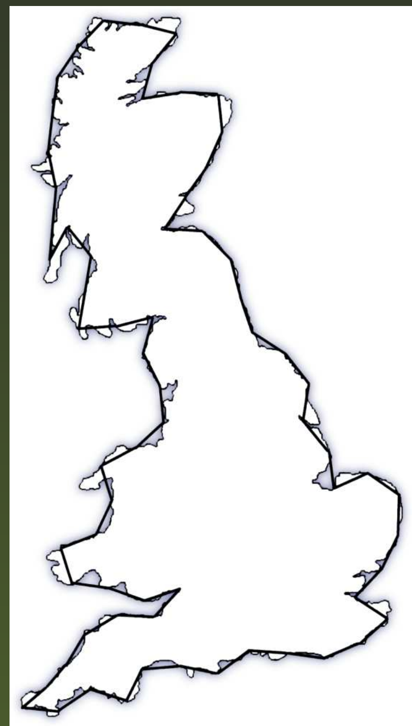
Wie lang ist die Küste von England?

Zirkelmethode



Zirkelweite: $\varepsilon = 100$ km

Länge: 3800 km



Zirkelweite: $\varepsilon = 50$ km

Länge: 5770 km

Wie lang ist die Küste von England?

Feststellungen

Wie lang ist die Küste von England?

Feststellungen

- Die Länge L der Küstenlinie hängt von der Größe des Maßstabes ε ab: $\underline{L = L(\varepsilon)}$.

Wie lang ist die Küste von England?

Feststellungen

- Die Länge L der Küstenlinie hängt von der Größe des Maßstabes ε ab: $\underline{L = L(\varepsilon)}$.
- Mit kleiner werdendem Maßstab ε divergiert die Länge $L(\varepsilon)$ der Küste.

Wie lang ist die Küste von England?

Feststellungen

- Die Länge L der Küstenlinie hängt von der Größe des Maßstabes ε ab: $\underline{L = L(\varepsilon)}$.
- Mit kleiner werdendem Maßstab ε divergiert die Länge $L(\varepsilon)$ der Küste.
- An keinem Punkt der Küste ist Differenzierbarkeit gewährleistet.

Wie lang ist die Küste von England?

Feststellungen

- Die Länge L der Küstenlinie hängt von der Größe des Maßstabes ε ab: $\underline{L = L(\varepsilon)}$.
- Mit kleiner werdendem Maßstab ε divergiert die Länge $L(\varepsilon)$ der Küste.
- An keinem Punkt der Küste ist Differenzierbarkeit gewährleistet.

$\longrightarrow$ Paradox $\longleftarrow$

Mandelbrot’s Lösung: Fraktale

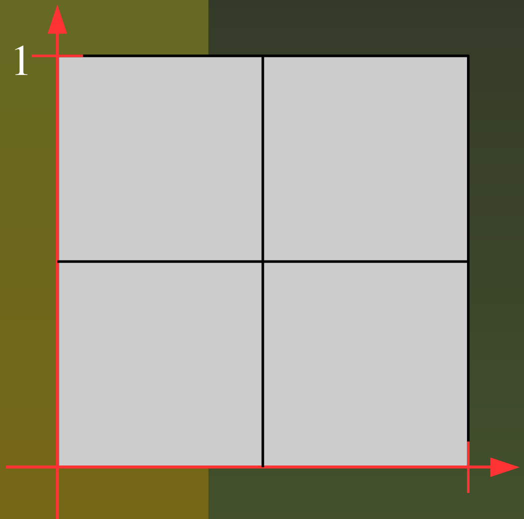
- Die Küste ist ein Mittelding zwischen Linie und Fläche, ein „Monstrum“ mit nicht ganzahliger Dimensionalität.

Mandelbrot’s Lösung: Fraktale

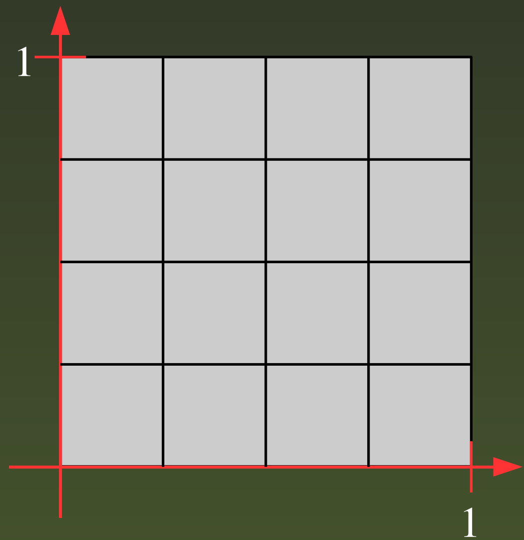
- Die Küste ist ein Mittelding zwischen Linie und Fläche, ein „Monstrum“ mit nicht ganzahliger Dimensionalität.
- Ein *Fraktal* ist eine Menge, deren *Hausdorff-Besicowitch-Dimension* echt die topologische Dimension übersteigt.

Volumenbestimmung

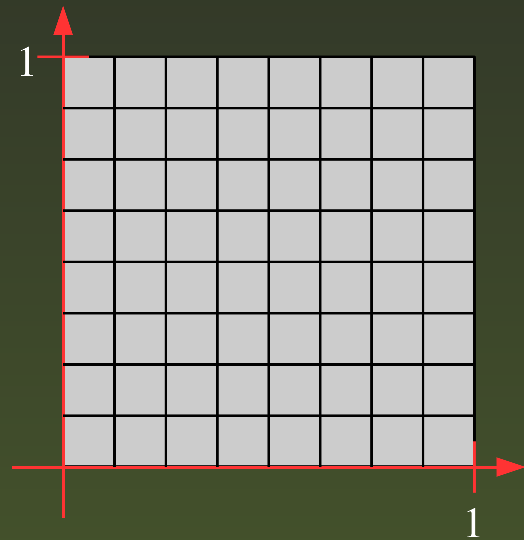
Flächenbestimmung eines Quadrates.



$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$
$$N(\varepsilon) = 4$$



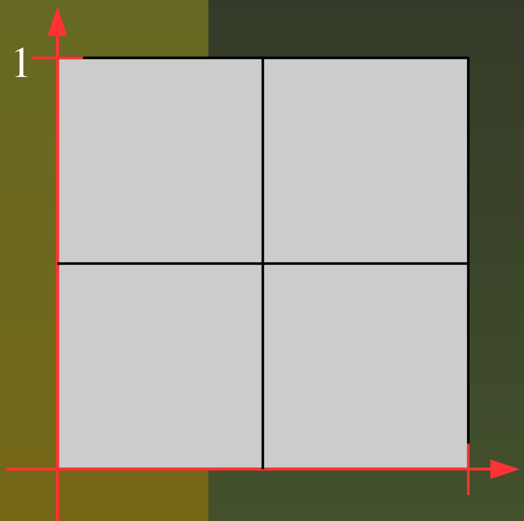
$$\varepsilon = \frac{1}{4}$$
$$N(\varepsilon) = 16$$



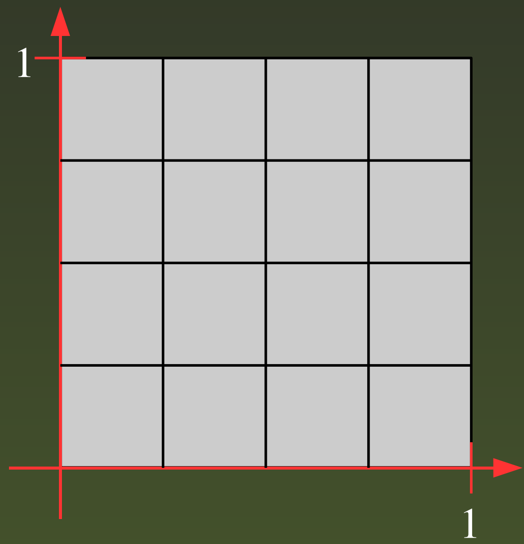
$$\varepsilon = \frac{1}{8}$$
$$N(\varepsilon) = 32$$

Volumenbestimmung

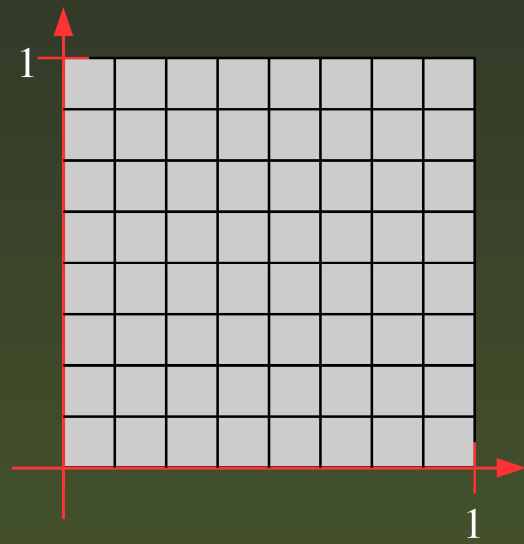
Flächenbestimmung eines Quadrates.



$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$
$$N(\varepsilon) = 4$$



$$\varepsilon = \frac{1}{4}$$
$$N(\varepsilon) = 16$$



$$\varepsilon = \frac{1}{8}$$
$$N(\varepsilon) = 32$$

$$V(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^2 \tag{4}$$

Volumenbestimmung

Strecke

$$V(\varepsilon) = n \cdot \left(\frac{C}{n}\right)^1 = C$$

Quadrat

$$V(\varepsilon) = n^2 \cdot \left(\frac{C}{n}\right)^2 = C^2$$

Würfel

$$V(\varepsilon) = n^3 \cdot \left(\frac{C}{n}\right)^3 = C^3$$

Kapazitätsdimension D_C

- Allgemein

$$V(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{D_C} \leftarrow \text{Kapazitätsdimension}$$

Kapazitätsdimension D_C

- Allgemein

$$V(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{D_C} \leftarrow \text{Kapazitätsdimension}$$

- $D_C = \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \left(\frac{\ln(V(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} - \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} \right)$

Kapazitätsdimension D_C

- Allgemein

$$V(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{D_C} \leftarrow \text{Kapazitätsdimension}$$

- $D_C = \lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} \left(\frac{\ln(V(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} - \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} \right)$

- Ergebnisse nur interessant, wenn $V(\varepsilon)$ konvergiert.

Kapazitätsdimension D_C

- Allgemein

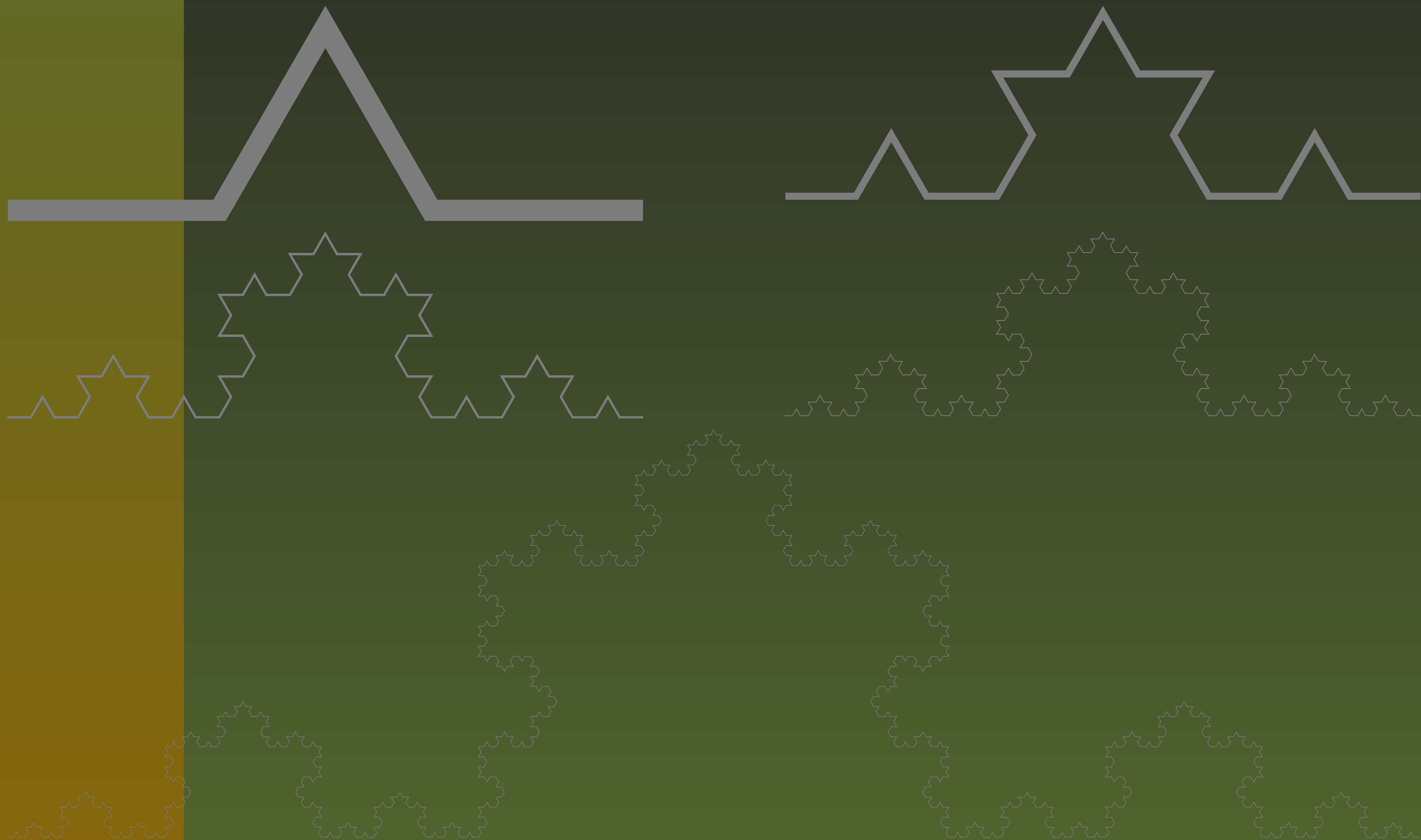
$$V(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{D_C} \leftarrow \text{Kapazitätsdimension}$$

- $D_C = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\ln(V(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} - \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)} \right)$

- Ergebnisse nur interessant, wenn $V(\varepsilon)$ konvergiert.

$$D_C = -\frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)}$$

Beispiel: Koch's Kurve



Literatur

- John Argyris, Gunter Faust, Maria Haase *Die Erforschung des Chaos*
- Benoît B. Mandelbrot *Die fraktale Geometrie der Natur*
- H. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe *Bausteine des Chaos - Fraktale*
- Jänich *Lineare Algebra*